

# CI 5 : DEMARCHE DE RESOLUTION D'UN PROBLEME DE CINEMATIQUE

<b>B2 Proposer un modèle de connaissance et de comportement</b>	Liaisons : - associations de liaisons en série et en parallèle - liaisons cinématiquement équivalentes	
<b>C2 Procéder à la mise en œuvre d'une démarche de résolution analytique</b>	Loi entrée – sortie géométrique	Déterminer la loi entrée - sortie géométrique d'une chaîne cinématique
	Dérivée temporelle d'un vecteur par rapport à un référentiel Relation entre les dérivées temporelles d'un vecteur par rapport à deux référentiels distincts Loi entrée – sortie cinématique Composition des vitesses angulaires Composition des vitesses	Déterminer les relations de fermeture de la chaîne cinématique Déterminer la loi entrée - sortie cinématique d'une chaîne cinématique
<b>F2 Mettre en œuvre une communication</b>	Schémas cinématique, électrique	Réaliser un schéma cinématique

## I. REPRESENTATION D'UN MECANISME

### 1. STRUCTURE D'UNE CHAINE DE SOLIDES

#### GRAPHE DES LIAISONS ET SCHEMA CINEMATIQUE

Le graphe des liaisons et la schématisation cinématique sont deux outils de représentation servant à illustrer les propriétés mécaniques et cinématiques d'un mécanisme. Ces illustrations servent de guide à la méthodologie de résolution de problèmes impliquant des mécanismes plus ou moins complexes.

Parmi l'ensemble des représentations graphiques existantes, deux outils sont tout particulièrement utilisés :

- le graphe des liaisons
- le schéma cinématique

Le graphe des liaisons est un outil qui donne une représentation "abstraite" du mécanisme. Abstraite, dans la mesure où il identifie les ensembles de pièces équivalentes et repère les liens qui unissent les différents ensembles en faisant abstraction de la structure physique réelle du mécanisme.

Le schéma cinématique est quant à lui un schéma "architecturale" qui permet d'une part de mettre en évidence la cinématique du mécanisme étudié, mais aussi d'identifier un certain nombre de propriétés cinétiques (telles que les efforts et les centres de gravité).

#### ENSEMBLE CINEMATIQUEMENT EQUIVALENT



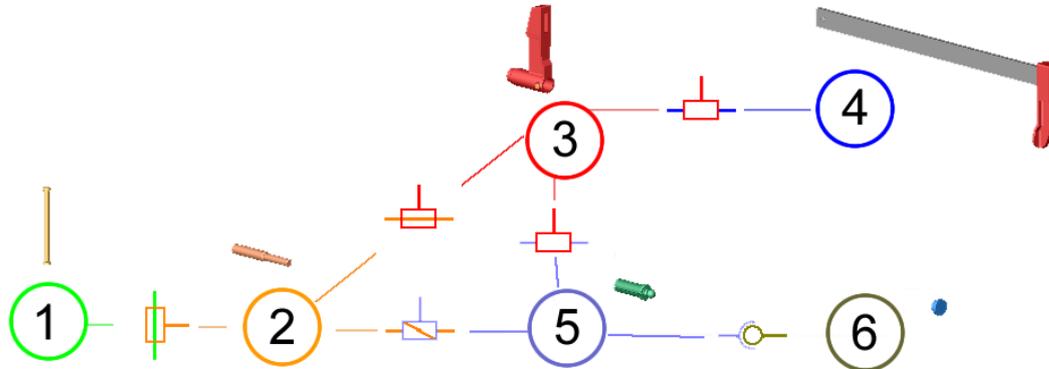
##### Définition

On appelle classe d'équivalence cinématique, un ensemble de solides n'ayant aucun mouvement relatif. Si l'on peut définir une suite de solides cinématiquement équivalents deux à deux, on peut alors regrouper tous ces solides dans un ensemble unique que l'on dit cinématiquement équivalent.

#### GRAPHE DES LIAISONS

Un graphe des liaisons est un schéma dans lequel on fait apparaître les classes d'équivalences d'un mécanisme et les liaisons associant ces différentes classes d'équivalences.

- Les classes d'équivalences sont représentées par des cercles au centre desquels sont placés des numéros de référence.
- Les liaisons sont quant à elles représentées par des arcs joignant deux classes. Les arcs sont enrichis d'un certain nombre d'informations. Classiquement un nom de référence de la liaison, sa caractérisation normalisée ou encore le torseur cinématique ou statique associé.



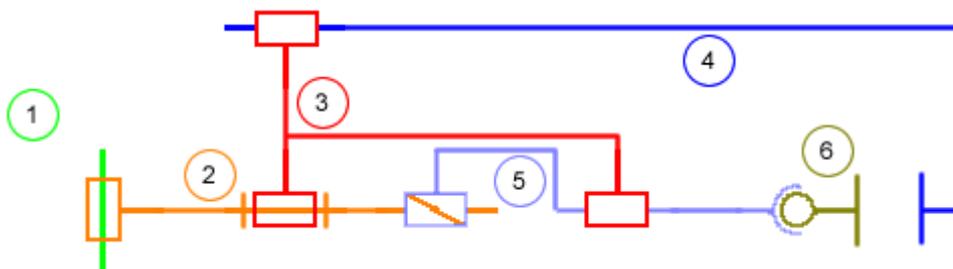
**SCHEMA CINEMATIQUE**

Le schéma cinématique d'un mécanisme est un modèle filaire du mécanisme utilisant les symboles normalisés des liaisons.

Ce modèle est utile tant au niveau de la conception que de l'analyse à posteriori pour réaliser l'étude cinématique ou dynamique (trajectoire, vitesse, efforts, etc.).

Quelques règles et conseils pour établir un schéma cinématique :

- Le schéma peut être réalisée en une vue en perspective ou en plusieurs vues en projection.
- La position relative des liaisons doit être respectée (perpendicularité, parallélisme, alignement, orientation précise, etc.)
- Les pièces sont dessinées très succinctement par un simple trait en général qui relie les différentes liaisons
- On ne doit pas privilégier une position particulière dans la représentation
- Le schéma doit être clair et permettre la compréhension du mécanisme



**Remarque : Schéma cinématique minimal**

Le schéma cinématique minimal est obtenu en remplaçant si possible, les liaisons en série et ou en parallèle par les liaisons normalisées équivalentes.

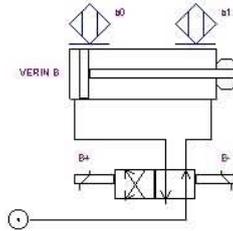
Le schéma cinématique minimal fait « disparaître » des solides et des liaisons, il est à utiliser avec précaution et uniquement pour l'étude cinématique et la compréhension cinématique du mécanisme. Il ne doit pas être utilisé pour réaliser des calculs d'hyperstatisme ou des calculs d'effort dans les liaisons.

**SCHEMA TECHNOLOGIQUE**

Il est parfois nécessaire afin de mieux comprendre le fonctionnement d'un mécanisme de compléter le schéma cinématique en ajoutant des constituants technologiques tels les ressorts, les courroies, les clapets d'un circuit hydraulique, . . .

On peut aussi préciser la forme de certaines pièces et décomposer les liaisons en liaisons élémentaires plus proche de la réalisation technologique ainsi on représentera une liaison pivot réalisée par deux roulements par une liaison sphère-cylindre (linéaire annulaire) et une liaison sphérique (rotule)

Ce schéma est alors appelé un schéma technologique



**2. LIAISONS CINEMATIQUEMENT EQUIVALENTES**



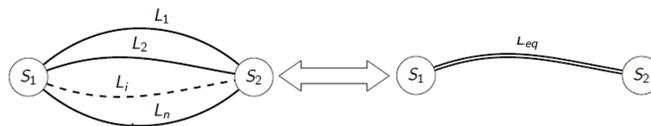
**Définition**

On appelle liaison cinématiquement équivalente entre deux pièces, la liaison qui se substituerait à l'ensemble des liaisons réalisées entre ces pièces avec ou sans pièce intermédiaire.

La liaison équivalente doit avoir le même comportement que l'ensemble des liaisons auquel elle se substitue.

**LIAISONS EN PARALLELE**

L'ensemble des liaisons  $\mathcal{L}_i$  en parallèle impose le mouvement du solide 2 par rapport au solide 1,  $\{v_{(S_2/S_1)}\}$  représente ce mouvement.



$\{v_{(S_2/S_1)}^{L_i}\}$ , le torseur cinématique de la liaison  $\mathcal{L}_i$  entre les deux solides S1 et S2.

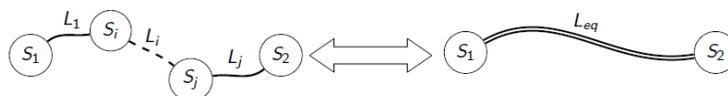
Chaque liaison  $\mathcal{L}_i$  ne peut que respecter le mouvement global du solide 2 :  $\{v_{(S_2/S_1)}^{L_i}\} = \{v_{(S_2/S_1)}\}$

La liaison équivalente  $\mathcal{L}_{eq}$  doit aussi respecter le mouvement global du solide 2 :

d'où la condition que doit respecter le torseur de la liaison équivalente :  $\{v_{(S_2/S_1)}^{eq}\} = \{v_{(S_2/S_1)}^{L_i}\}$

**LIAISONS EN SERIE**

On recherche le torseur cinématique du mouvement du solide 2 par rapport au solide 1 :  $\{v_{(S_2/S_1)}\}$



En décomposant sur les solides intermédiaires on obtient :

$$\{v_{(S_2/S_1)}^{eq}\} = \{v_{(S_i/S_1)}^{L_1}\} + \dots + \{v_{(S_2/S_j)}^{L_j}\}$$

## II. METHODES DE RESOLUTION ANALYTIQUE

### 1. DANS LE CAS D'UNE CHAINE FERMEE DE SOLIDE

En présence d'une chaîne fermée de solides, nous devons gérer les compatibilités de mouvements, ce qui donne lieu à l'écriture d'un système d'équations linéaires en position et en vitesse par dérivation. Ces structures engendrent un effet de transformation de mouvement, dont il convient de déterminer la " loi entrée - sortie "

#### ANALYSE GEOMETRIQUE D'UNE CHAINE FERMEE DE SOLIDES

Nous utilisons des relations vectorielles du type :

$$\overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \dots + \overrightarrow{O_nO_0} = \vec{0}$$

Ces relations vectorielles projetées sur deux axes (mécanismes plans) ou trois axes (mécanismes spatiaux), conduisent à deux (trois) relations scalaires entre les paramètres de situation des solides.

Dans le cas de **mécanismes plans**, nous obtenons, en supplément, des relations angulaires du type :

$$(\overrightarrow{X_0, X_1}) + (\overrightarrow{X_1, X_2}) + \dots + (\overrightarrow{X_n, X_0}) = 0$$

Dans le cas de mécanismes spatiaux, nous pouvons traduire le fait qu'une liaison impose un angle constant (souvent droit) entre deux vecteurs des bases liées au solides

Exemple : joint de Cardan où les bras du croisillon font un angle de 90°

#### ANALYSE CINEMATIQUE D'UNE CHAINE FERMEE DE SOLIDES

Cette analyse permet d'écrire des relations du type :

$$\{\mathcal{V}_{0/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/2}\} + \dots + \{\mathcal{V}_{n/0}\} = \{0\}$$

Ces relations conduisent à deux relations (égalité des résultantes, égalité des moments au même point), qui projetées sur deux axes (mécanismes plans) ou sur trois axes (mécanismes spatiaux), permettent d'obtenir trois ou six relations scalaires entre les dérivées des paramètres de situation des solides.

### 2. DANS LE CAS D'UNE CHAINE OUVERTE DE SOLIDES

#### ANALYSE GEOMETRIQUE D'UNE CHAINE OUVERTE DE SOLIDES

Pour un point  $M_0$  d'un solide  $S_0$  les relations vectorielles seront du type : ( $M_i$  : points particuliers des solides (centres de gravité, centres des liaisons, extrémités, etc....))

$$\overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \dots + \overrightarrow{M_{n-1}M_n} = \overrightarrow{M_0M_n}$$

Ces relations projetées sur deux axes (mécanismes plans) ou trois axes (mécanismes spatiaux), conduisent à l'écriture de relations scalaires des paramètres de situation des solides.

Ces relations sont indépendantes entre-elles.

#### ANALYSE CINEMATIQUE D'UNE CHAINE OUVERTE DE SOLIDES

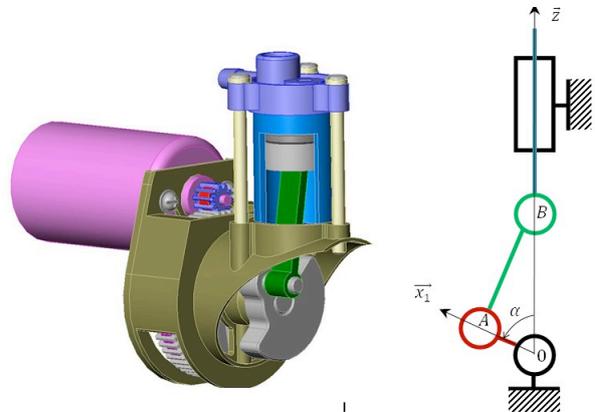
Il convient de déterminer les vitesses et accélérations des points particuliers des solides (centres de gravité, centres des liaisons, extrémités, etc...) de la chaîne de solides, par différentes méthodes (ou combinaison de méthodes) :

- dérivation directe du vecteur position
- composition des vitesses, des accélérations
- torseurs cinématiques au même point : champ des vitesses d'un solide
- vitesse de glissement

# III. LES TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENTS CLASSIQUES

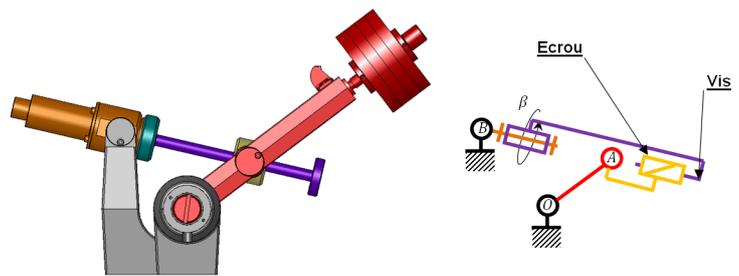
## 1. SYSTEME BIELLE MANIVELLE

**Exemple :** compresseur pneumatique TD n°4 exo 1  
**Transformation :** Rotation continue en translation alternative et inversement.  
**Réversibilité :** Parfois  
**Utilisation :** Moteurs thermiques, compresseurs, certaines pompes et moteurs hydrauliques, marteau perforateur...  
**Caractéristiques :** excentricité  $OA = e$  et longueur de la bielle  $AB = L$   
**Loi d'entrée-sortie:**  $\lambda = e \cdot \cos\alpha + \sqrt{L^2 + e^2 \cdot \sin^2\alpha}$  avec  $\lambda$  position du piston et  $\alpha$  angle de rotation du vilebrequin



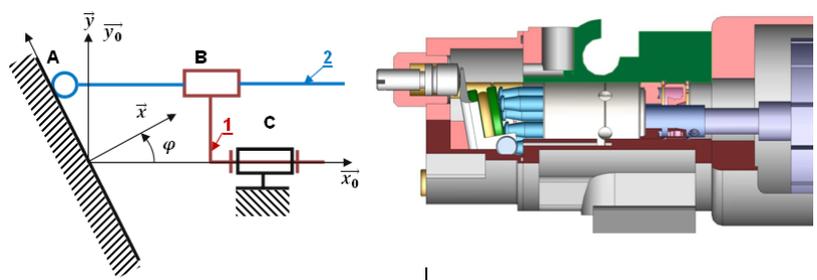
## 2. SYSTEME VIS-ECROU

**Exemple :** MaxPID Synthèse de TP sur la loi d'entrée-sortie  
**Transformation :** Rotation continue en translation continue.  
**Réversibilité :** Dépend des frottements dans la liaison.  
**Utilisation :** Vérins électriques, chariots de machine-outil, pilote automatique, élévateur...  
**Caractéristiques :**  $p$  pas de la vis en  $mm$   
**Loi d'entrée-sortie:**  $\dot{x} = \frac{p}{2\pi} \cdot \dot{\beta}$  avec  $\dot{x}$  vitesse de translation de l'écrou et  $\dot{\beta}$  vitesse de rotation de la vis



## 3. SYSTEME A CAME

**Exemple :** Pompe hydraulique du pilote automatique de bateau - TD 5 exo n°1  
**Transformation :** Rotation continue en translation alternative.  
**Réversibilité :** Oui (moteur : translation vers rotation et pompe rotation vers translation).  
**Utilisation :** Pompes et moteurs hydrauliques  
**Caractéristiques :** inclinaison du plan (fixe)  $\phi = (\vec{x}_0, \vec{x})$ ,  $R = \overline{BC} \cdot \vec{y}$  rayon des pistons  
**Loi d'entrée-sortie :**  $\dot{\lambda} = \dot{\alpha} \cdot R \cdot \tan\phi \cdot \sin\alpha$  avec  $\dot{\lambda}$  vitesse du piston et  $\dot{\alpha}$  angle de rotation du barillet 1



**4. POMPE A PISTONS RADIAUX**

**Exemple :** Système à excentrique TD 1 exo n°1 - Pompe à pistons radiaux de Xantia

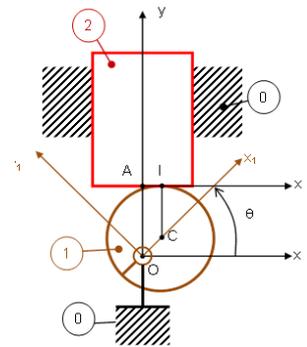
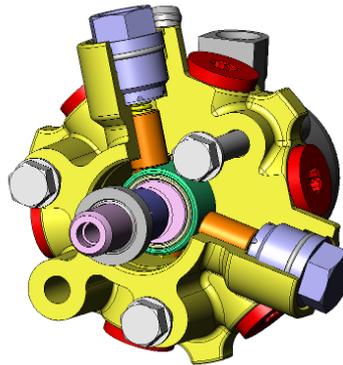
**Transformation :** Rotation continue en translation alternative.

**Réversibilité :** Dépend des frottements dans la liaison.

**Utilisation :** Pompes hydrauliques, taille haie.

**Caractéristiques :** excentricité  $e$

**Loi d'entrée-sortie:**  $\lambda = R + e \cdot \sin\theta$  avec  $\lambda$  position du piston ( $OA$ ),  $\theta$  angle de rotation de l'excentrique



**5. SYSTEME A CROIX DE MALTE**

**Exemple :** Distributeur de dose de café, Capsuleuse de Bocaux

**Transformation :** Rotation continue en rotation intermittente.

**Réversibilité :** jamais

**Utilisation :** Plateau tournant de machine de transfert, indexage...

**Caractéristiques :** Angle entre les différentes rainures, et rayon de position de l'ergot =  $O_1A$ .

**Loi d'entrée-sortie:**  $\tan\beta = \frac{L-R \cdot \cos\theta}{R \cdot \sin\theta}$  quand  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  avec  $L$  distance des deux centres de rotation ( $O_1O_2$ )

